

- MASON, J. (1991): «Mathematical problem solving: Open, closed and exploratory». *UK, ZDM*, n. 91(1), pp. 14-19.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1980): *An agenda for action: recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, Va. NCTM.
- (1989): *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, Va. NCTM.
- NATIONAL RESEARCH COUNCIL (1989): *Everybody counts*. Washington, DC. National Academy Press.
- NISS, M. (1992): «O papel das aplicações e da modelação na Matemática escolar». *Educação e Matemática*, n. 23, pp. 1-2.
- POLYA, G. (1981): *Mathematical discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*. Nueva York. Wiley.
- RESNICK, L. (1987): *Education and learning to think*. Washington, DC. National Academy Press.
- SAWYER, W. (1992): «Does mathematics rest on facts?», en ORMELL, C. (ed.): *New thinking about the nature of mathematics*. MAG. University of East Anglia, pp. 44-47.
- SCHOENFELD, A. (1991): «What's all the fuss about problem solving?». *ZDM*, n. 91/1, pp. 4-8.
- (1992): «Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics», en GROUWS, D.A. (ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Nueva York. Macmillan.

9

Ideas, pautas y estrategias heurísticas para la resolución de problemas

Juan Emilio García Jiménez

Asesor de matemáticas del Centro de Profesores de Villarrobledo (Albacete)

Ideas, tendencias y creencias sobre la resolución de problemas

Resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no se consigue de forma inmediata, utilizando los medios adecuados. (G. Polya)

La resolución de problemas es considerada en la actualidad la parte más esencial de la educación matemática. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las matemáticas en el mundo que les rodea.

El párrafo 243 del Informe Cockroft señala en su punto quinto que la

Artículo publicado en *Aula de Innovación Educativa*, n. 6, pp. 14-21, septiembre 1992.

enseñanza de las Matemáticas debe considerar la «resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las mismas a situaciones de la vida diaria».

El NCTM de Estados Unidos, declaraba hace más de diez años que el objetivo fundamental de la enseñanza de las matemáticas no debería ser otro que el de la resolución de problemas.

En España, el currículum de matemáticas en primaria y secundaria (que está a punto de iniciar su implantación) concede extraordinaria importancia al tema dedicándole mucha atención, especialmente desde los contenidos de procedimientos y actitudes.

En el libro de Hofstadter *Gödel, Escher y Bach*, se dice que las capacidades básicas de la inteligencia se favorecen desde las matemáticas a partir de la resolución de problemas, siempre y cuando los problemas no sean vistos como situaciones que requieran una respuesta única (conocida previamente por el profesor que encamina hacia ella), sino como un *proceso* en el que el alumno estima, hace conjeturas y sugiere explicaciones.

Antes de seguir adelante, conviene hacer una distinción entre problemas y ejercicios. En los ejercicios, el resolutor dispone de un algoritmo que una vez aplicado le lleva a la solución. En estos casos, el único problema, si así puede llamársele, estriba en averiguar el algoritmo que hay que aplicar.

Cuando se trata de problemas, el resolutor ha de resolver una situación usando los conocimientos que tiene directamente disponibles. Es decir, no dispone de un procedimiento a mano para resolverlo, pero sí tiene conocimientos matemáticos y heurísticos para avanzar en la resolución del problema.

Muchos estudiantes conciben la resolución de problemas como si fueran ejercicios, buscan en la memoria la regla u operación adecuadas y, si no las encuentran en cinco minutos, piden ayuda al profesor: ¿qué tengo que hacer?, ¿esto de qué es?...

Este artículo (que trata de la resolución de problemas con alumnos de la etapa 12-16) intenta aportar ideas en el sentido de que hay métodos, procedimientos y actitudes que favorecen el éxito de la mayoría de los alumnos de una clase en la resolución de problemas. De la mayoría y no sólo de los más dotados.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas lleva mucho tiempo; los resultados tardan en llegar. En este sentido, cabe advertir que sería bueno poder trabajar con los mismos alumnos dos o tres años seguidos. Partiendo, pues, de las condiciones de tiempo y continuidad,

es preciso reconocer que como profesores podemos servir de ayuda en la adquisición y consolidación de herramientas para la resolución de problemas.

Numerosos estudios confirman que con la enseñanza de pautas, estrategias y técnicas se consiguen más y mejores resolutores que con la mera práctica espontánea en resolver problemas. Dicho de otro modo, la habilidad para resolver problemas no sólo se adquiere resolviendo muchos problemas, sino tomando soltura y familiaridad con una gama de técnicas de resolución, conocidas por heurísticas.

Como profesores tenemos que esforzarnos por desarrollar en los alumnos la *confianza* para abordar y resolver problemas. Para ello hemos de evitar la tentación de interrumpir sus procesos de resolución con indicaciones que lleven a soluciones rápidas y elegantes. Esas indicaciones evitan las dificultades, en vez de superarlas, y no facilitan la confianza y la autonomía de los alumnos. Por otro lado, si el problema que proponemos no es adecuado al nivel de los alumnos, la falta de ayudas y orientaciones puede llevar al fracaso y a la frustración.

El equilibrio entre demasiada y demasiado poca intervención es, sin duda alguna, la clave para ayudar a nuestros estudiantes en la resolución de problemas.

Todo cuanto se haga en estos años sobre la enseñanza de la resolución de problemas será de agradecer, porque los profesores lo necesitamos, dado que los libros de texto suelen presentar ejercicios en lugar de problemas. Tareas estereotipadas que por lo general favorecen la rutina y la práctica reiterada de algoritmos y fórmulas. Toda «práctica» se reduce a aplicar el algoritmo o la fórmula adecuadas al caso. Si los alumnos no comprenden el texto o no encuentran la operación para resolverlos, el profesor resuelve delante de toda la clase. De este modo se trivializa el concepto de problema, se ahorra esfuerzo a los alumnos porque saben, en definitiva, que resolverá el profesor y se generará falta de confianza en los alumnos sobre sus propias posibilidades.

Los buenos resolutores de problemas se caracterizan por disponer de:

1. Conocimientos matemáticos adecuados a los problemas con los que se hayan de enfrentar.
2. Conocimiento de estrategias heurísticas.
3. Deseo de resolver el problema, una vez que lo ha aceptado como tal, es decir, que lo ve asequible para él y que le resulta interesante de resolver.

Pautas para la resolución de problemas

Esta breve y esquemática guía de pautas para la resolución de problemas está basada en la muy extensa de Polya, en ciertos aspectos del modelo de Burton, Mason y Stacey, así como en algunas orientaciones de Schoenfeld.

Una ficha como la que figura en el cuadro 1 se entrega a los alumnos de tercer ciclo de educación primaria y de todos los cursos de educación secundaria. En reuniones de profesores analizamos los diferentes aspectos y discutimos sobre las mejores maneras de adquirirlas como hábitos de trabajo para nosotros mismos y para nuestros alumnos.

Cuadro 1. Pautas para la resolución de problemas

ABORDAJE
1. Comprender el problema • Lee el problema despacio. • ¿Cuáles son los datos? (lo que conoces). ¿Cuál es la incógnita? (lo que buscas). • Trata de encontrar la relación entre los datos y la incógnita. • Si puedes, haz un esquema o dibujo de la situación. 2. Concebir un plan • ¿Este problema es parecido a otros que ya conoces? • ¿Podrías plantear el problema de otra forma? • Imagínate un problema parecido, pero más sencillo. • Supón que el problema ya está resuelto; ¿cómo se relaciona la situación de llegada con la de partida? • ¿Utilizas todos los datos cuando haces el Plan?
ATAQUE
3. Llevar a cabo el plan • Al ejecutar el plan, comprueba cada uno de los pasos. • ¿Puedes ver claramente que cada paso es correcto? • Antes de hacer algo piensa: ¿qué consigo con esto? • Acompaña cada operación matemática de una explicación contando lo que haces y para qué lo haces. • Cuando tropieces con alguna dificultad que te deja bloqueado, vuelve al principio, reordena las ideas y prueba de nuevo.

REVISIÓN

4. Reflexión sobre el proceso seguido. Revisión del plan

- Lee de nuevo el enunciado y *comprueba que lo que te pedían es lo que has averiguado.*
- *Fíjate en la solución, ¿te parece que lógicamente es posible?*
- ¿Puedes comprobar la solución?
- ¿Hay algún otro modo de resolver el problema?
- ¿Puedes hallar alguna otra solución?
- *Acompaña la solución de una explicación que indique claramente lo que has hallado.*
- Utiliza el resultado obtenido y el proceso que has seguido para formular y plantear nuevos problemas.

Haré unos breves comentarios sobre las líneas que aparecen en cursiva en cada uno de los puntos del cuadro 1 porque las considero de especial relevancia.

1. Plantear el problema de otra manera supone una mayor comprensión del enunciado y puede facilitar la resolución porque después se puede ver más sencillo.

Ejemplo: «Un cajón cuadrado para transportar botellas de leche puede contener 36 de esas botellas. ¿Puedes colocar 14 de esas botellas, de forma que en cada fila y en cada columna haya un número par de botellas?». *Planteadlo de otra manera sería:* «En un cuadrado de 6 x 6, obtener 14 como suma de dos números pares menores o iguales que 6».

2. Antes de hacer algo en la resolución de un problema, debemos provocar a los alumnos para que se vayan planteando lo que van a adelantar con cada cosa que vayan haciendo. Porque no se trata de hacer cálculo así como así. Y esto es lo que ocurre habitualmente: muchos alumnos se ponen a calcular sin más, hacer por hacer; se hacen cálculos, pero no se progresa hacia la solución.

3. Cada operación matemática debe ir acompañada de una explicación de lo que se hace y para qué se hace. El expresar el proceso de resolución:

a) Aumenta la comprensión del problema.

- b) Permite repasar o recorrer el camino desde el principio al fin.
 - c) Ayuda a controlar la resolución del problema porque todo está delante de quien lo resuelve.
 - d) Facilita la valoración del profesor, puesto que es posible analizar los procesos y no sólo los resultados.
4. La revisión del proceso seguido, una vez que ha concluido la resolución, es una parte muy importante. Permite juzgar lo razonable de un resultado, plantearse si hay otra u otras maneras de resolverlo y considerar la posibilidad de otras soluciones.

A menudo deben proponerse problemas que sean resueltos en grupos de alumnos, para que puedan discutir de estrategias y soluciones, considerar diversas alternativas, hacerse preguntas, etc. En todo caso, los diferentes enfoques, estrategias y modos de resolver un problema, deben discutirse en la clase, destacando por parte del profesor los modos más creativos y originales, dando la oportunidad de que todos expresen oralmente sus argumentos y de que, en definitiva, todos aprendan de todos.

Análisis de algunas estrategias heurísticas

Resolver primero uno más sencillo

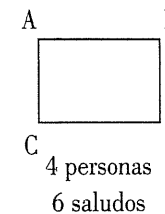
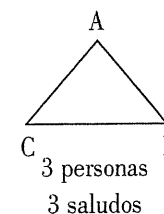
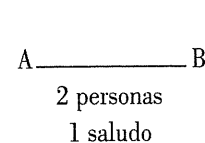
Esta estrategia se usa a menudo ligadas a otras, como hacer una tabla y buscar una pauta. Así ocurre en el problema siguiente:

En una reunión hay 20 personas y todas ellas se saludan dándose un apretón de manos. ¿Cuántos apretones se habrán dado cuando todas las personas se hayan saludado? ¿Y si hubiese n personas?

¿Podría saberse cuántas personas habrá en una reunión en la que se hayan intercambiado 1.225 saludos?

Una aproximación útil es plantearse el problema con 2, 3 o 4 personas. *Particularizar.*

En este caso, *usar una representación* facilita encontrar la solución.



Hacemos una tabla a partir de estos dibujos para ver si encontramos una pauta.

Personas	2	3	4
Saludos	1	3	6

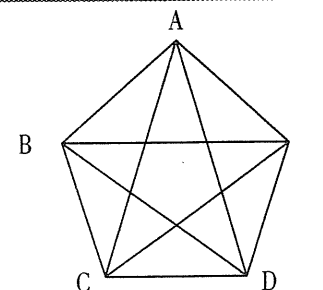
Conjetura: Observo que el número de apretones de manos va creciendo, de modo que primero se suman 2, luego 3. Supongo que para 5 personas el número de apretones de manos será de 10 ($6 + 4$).

Polya (1981) decía:

Deja que los estudiantes hagan conjeturas antes de darles tú la solución, déjales averiguar por sí mismos tanto como sea posible; deja a los estudiantes que hagan preguntas, déjales que den respuestas. A toda costa, evita responder preguntas que nadie haya preguntado, ni siquiera tú mismo.

Volvamos al problema. La conjetura se comprueba para lograr una confianza que nos permita avanzar con seguridad.

Un dibujo da la respuesta.



En efecto, 5 personas dan 10 saludos. Si continuamos la tabla sumando en la fila de abajo 5, 6, 7, 8, etc. obtendremos el número de apretones de manos de 20 personas. Esto significaría resolver el problema particular, pero cabe preguntarse lo que pasaría si el número de persona fuese mayor. En este caso resultaría pesado hacer una tabla. Además, el problema plantea como *extensión* el número de saludos para n personas. Esto es *generalizar*.

Un alumno razonó así:

- Cada persona aprieta la mano de todos excepto la suya.
- Habiendo 3 personas, si cada uno aprieta la mano de los otros dos, habrá seis apretones de manos.
- ¡Un momento! Esto no coincide con los cálculos del principio y representados en el dibujo. ¡Ah!, ya sé. He contado 2 veces el mismo apretón de manos, de A con B y de B con A. Para que esto no suceda tengo que dividir por 2. Para 3 personas sería

$$\frac{3 \times 2}{2} = 3$$

Si son 4 persona

$$\frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Cada persona n puede saludar a $n-1$ personas.

La fórmula para n personas será $n(n-1) / 2$. *Generalizar*.

La generalización nos permite aprender de este problema para encontrar la ley que solucione otros casos similares al que se trata. En Pitágoras tenemos un buen ejemplo de este deseo de generalización.

Otro alumno de 13 años resolvió el problema del siguiente modo:

P3	3-1	3-2	NO
P2	2-1	NO	NO
P1	NO	NO	NO
	P1	P2	P3

Ejecuto un plan en el cual realizo varios problemas más sencillos.

En una reunión hay 3 personas: para hallar los saludos realizo una tabla en la cual P_1 es la persona 1, P_2 es la persona 2 y P_3 es la persona 3.

Con 3 personas hay 3 saludos. En una reunión hay 4 personas. Con cuatro personas hay 6 saludos.

P4	4-1	4-2	4-3	NO
P3	3-1	3-2	NO	NO
P2	2-1	NO	NO	NO
P1	NO	NO	NO	NO
	P1	P2	P3	P4

P5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5
P4	4-1	4-2	4-3	NO	NO
P3	3-1	3-2	NO	NO	NO
P2	2-1	NO	NO	NO	NO
P1	NO	NO	NO	NO	NO
	P1	P2	P3	P4	P5

Ahora busco una ley, por lo cual hago el número de saludos sin necesidad de realizar una tabla.

En el caso más sencillo puedo realizar la siguiente ley:

$(3-1) + (3-2) = 3$. Puesto que en este caso la ley es cierta, voy a ponerla en práctica en el siguiente caso.

$(4-1) + (4-2) + (4-3) = 3+2+1=6$ saludos.

En el caso de 5:

$(5-1) + (5-2) + (5-3) + (5-4) = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$ saludos.

¡¡¡He hallado la ley!!!

El problema continúa: ¿Y si hubiese n personas? Muy sencillo, sería así: $(n-1) + (n-2) + (n-3) \dots + (n-x) = y$ saludos.

Es interesante que estos *procesos de resolución* alternativos sean comentados y discutidos con toda la clase.

Un problema queda completamente resuelto cuando somos capaces de proceder a la «inversa». Si antes conocíamos el número de personas y deseábamos saber el número de apretones de manos, ahora lo que deseamos saber es el número de personas conociendo el número de apretones de manos.

$$1.225 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$1.225 = \frac{n^2 - n}{2}$$

$$n^2 - n - 2.450 = 0$$

Resolviendo la ecuación sale $n = 50$; $n - 1$ será 49.

¿Hay otro modo de resolverlo?

$$1.225 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Visto así, lo que ocurre es que tenemos que encontrar dos números consecutivos, de tal modo que multiplicando uno por la mitad del otro obtengamos 1.225. Dicho de otro modo, el producto de dos números consecutivos debe ser 2.450. Como 50×50 es 2.500 y estamos buscando un producto que nos dé 2.450, que es 50 menos, debemos multiplicar 50×49 . 50 personas.

Problemas análogos

1. Se construye una carretera para comunicar un par de ciudades. ¿Cuántas carreteras se construirán si se quiere comunicar 12 ciudades y cada carretera puede comunicar sólo 2 ciudades?
2. Pedro y 6 amigos pasaron un día en el parque de atracciones. Al final del día decidieron emparejarse para subir a la montaña rusa. Cada amigo se montaría con los otros una y sólo una vez. ¿Cuántos viajes deberían hacer?
3. En una estación ferroviaria se venden tantos billetes distintos como estaciones a las que se puede acceder desde ella. Desde cada una se accede a todas las demás; se abren nuevas estaciones y ello obliga a imprimir 34 nuevos billetes. ¿Cuántas estaciones había? ¿Cuántas se han inaugurado?

Segundo ejemplo: problema del heno

Unos granjeros almacenaron heno para 57 días. Sin embargo, el heno almacenado era de mejor calidad de lo que pensaban, por lo que ahorraron 113 kg por día y tuvieron para 73 días. ¿Cuántos kilogramos de heno almacenaron?

Un problema parecido pero más sencillo

En una casa compran pan para 6 días. Sin embargo, esa semana tuvieron menos apetito de lo normal y ahorraron una barra de pan diaria, por lo que tuvieron pan para 9 días. ¿Cuántas barras de pan compraron?

La dificultad del problema del heno reside tanto en los números como en el contexto. El problema del pan tiene números más «asequibles» y un contexto que resulta familiar a los chicos.

Plan de resolución:

1. Saber las barras de pan que ahorran.
2. Como la diferencia debida al ahorro es de 3 días, las barras de pan ahorradas se reparten entre 3 y así descubriré el consumo de pan diario.
3. Por último, hemos de multiplicar por 9, puesto que éste es el número de días que estuvieron consumiendo pan.

Ejecución del plan:

1. 6 días ahorrando una barra por día. $6 \times 1 = 6$. Ahorran 6.
2. a) $9 - 6 = 3$. Por ahorrar una barra diaria, tienen pan para tres días más.
b) $6 : 3 = 2$. Consumen 2 barras diarias.
3. $9 \times 2 = 18$. Así pues, compran 18 barras.
4. Si no hubieran ahorrado una barra diaria, el consumo sería de 3 barras diarias. $3 \times 6 = 18$.

En cualquier caso consumen 18 barras de pan.

Problema del heno

Plan de resolución:

1. Averiguar el número total de kilogramos de heno ahorrados.
2. Calcular la diferencia entre el número de días para los que hay heno si se ahorra y el número de días para los que se preveía que hubiera sin ahorrar.
3. Si repartimos los kilogramos de heno ahorrados entre los días que hay (ahorrando y sin ahorrar), descubriremos el consumo de heno diario.
4. Multiplicaré el consumo de heno diario por 73. Es de esperar que el resultado sea el mismo que si multiplico el consumo diario más 113 por 57 (*conjetura*).

Ejecución del plan:

1. $113 \times 57 = 6.441$. Multiplico 113 kg de ahorro diario por 57 días que duraría el ahorro.
Obtenemos 6.441 kg de heno ahorrados.
2. $73 - 57 = 16$. Lo ahorrado duraría 16 días.

3. $6.441 : 16 = 402,56$. Al repartir el heno ahorrado entre los días que dura el ahorro, se obtienen 402,56 kg de heno por día. Éste debe ser el consumo por día, puesto que es lo que toman los animales desde el día 57 hasta el 73.
4. $402,56 \times 73 = 29.386,88$.
 $57 (113 + 402,56) = 29.389,88$.

Almacenaron 29.386,88 kg de heno.

Hacer tablas y buscar pautas

Hacer tablas y buscar en ellas alguna pauta es una estrategia útil para cierto tipo de problemas. Veamos algunos de ellos:

Problema 1:

¿Cuántas casillas cuadradas de diferente tamaño tiene un tablero de ajedrez?

Tipo	1 x 1	2 x 2	3 x 3	4 x 4	5 x 5	6 x 6	7 x 7	8 x 8
N.º de cuadrados	64	49	36	25	16	9	4	1

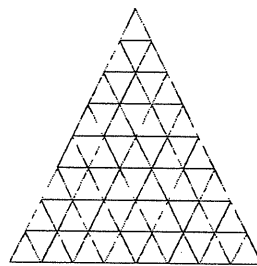
Total de casillas: 204.

Podemos observar que, desde el cuadrado formado por todo el tablero de ajedrez (8 x 8), el número de cuadrados de las siguientes clases se va formando sumando al anterior la serie de números impares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.

Una vez terminado el problema surgen nuevas preguntas: ¿Y si el tablero fuese de 10 x 10? ¿Y si las dimensiones fuesen $n \times n$?

Problema 2:

¿Cuántos triángulos equiláteros hay en una parrilla triangular de 8 unidades de lado?



En primer lugar debemos entender que se trata de triángulos de diferente longitud de lado. Veamos:

- De lado 1: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots$

Observamos que van creciendo según la serie de los números naturales impares.

$$1 + 3 = 4 \dots\dots 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 \dots\dots 3^2$$

Así es que la suma de los dos primeros impares es el cuadrado de 2 y la suma de los tres primeros impares es el cuadrado de 3.

Conjetura: la suma de los 8 primeros impares será el cuadrado de 8.

Fila	1	2	3	4	5	...
Triángulos	1	3	5	7	9	...

Hay en total 64 de lado 1.

- De lado 2:

Fila	1	2	3	4	5	6	7
Triángulos	1	2	4	6	8	10	12

Hay triángulos invertidos en las filas 3(1), 4(2), 5(3), 6(4), 7(5).

Total de lado 2: 43 triángulos.

- De lado 3 aparecen 27:

Fila	1	2	3	4	5	6
Triángulos	1	2	3	5	7	9

Con la punta hacia abajo aparecen: fila 4(1), fila 5(2) y en la fila 6(3).

- De lado 4 hay 16, de lado 5 hay 10, de lado 6 hay 6, de lado 7 hay 3 y de lado 8 solamente 1.

Lados	1	2	3	4	5	6	7	8
Triángulos	64	43	27	16	10	6	3	1

Triángulos según el tamaño de sus lados: 170.

¿Hay otro modo de hacerlo?

Diferenciando desde el principio triángulos con las puntas hacia arriba o hacia abajo.

- Hacia arriba:

Tipo de lado	1	2	3	4	5	6	7	8
Número	36	28	21	15	10	6	3	1
Incremento						+3	+2	

Total: 120.

- Hacia abajo:

Tipo	1	2	3	4
Número	28	15	6	1
Incremento	+13	+9	+5	
	+4	+4	+4	

Total: 50.

Generalización: para una red de $n \times n$.

$1/6 n (n + 1) (n + 2)$. Hacia arriba.

$1/24 n (n + 2) (2n - 1)$. Hacia abajo, si n es par.

$1/24 (n - 1) (n + 1) (2n + 3)$. Hacia abajo, si n es impar.

Como se puede ver en este segundo modo de resolución, las tablas ya presentan pautas de las que se pueden extraer conclusiones para la *generalización*.

Jugando con cerillas

Sobre una mesa hay dos montones de cerillas con 5 cerillas cada uno. Cada jugador por turno puede coger una cerilla de un montón o una cerilla de cada montón. Pierde el que coge la última cerilla.

¿Tiene ventaja alguno de los jugadores? Si es así, ¿cómo debe jugar para ganar siempre?

En este problema juega un importante papel la *particularización*, que, como ya se sabe, consiste en centrar la atención sobre un caso más sencillo con el fin de entender mejor el problema, encontrar alguna pauta que nos permita avanzar y, por supuesto, lograr un primer resultado que nos dé confianza y estímulo para seguir adelante.

Si los montones fuesen más pequeños, por ejemplo, de dos cerillas cada uno, está muy claro quién sería el ganador: el que jugara en segundo lugar, porque el primero puede tomar 1 o $(1 + 1)$, entonces el segundo tomará 2 $(1 + 1)$ o 1, dejando una cerilla que, cogiéndola el primero, le hará perder.

Así que la cuestión puede ser: «¿Cómo dejar sobre la mesa después de jugar yo dos montones de dos cerillas cada uno?».

A partir de aquí debe ser útil la estrategia de *ir hacia atrás*. Se toman fichas, se juegan partidas con uno mismo: «Yo tomo, él tomará, entonces yo..., luego él...».

En este problema, como en tantos otros, la fase manipulativa es necesaria en los primeros momentos, pero después conviene hacerse con una buena representación. Cada vez que toca jugar, se tienen tres opciones; por lo tanto, las posibles jugadas están en el orden de las potencias de 3. Una idea que surge pronto es la de realizar un diagrama de árbol y cuando esté terminado, recorrerlo hacia atrás desde las posiciones de «éxito». La idea se abandona tras un primer intento, porque enseguida el árbol se ramifica en exceso.

Un diagrama cartesiano (véase en la página siguiente) sí nos permite una representación adecuada del problema. A partir de él podemos elaborar nuestra estrategia «viajando» por posiciones ganadoras.

Para ganar el primero, de salida cogerá una cerilla de cada montón situándose en (4,4), si el otro hace lo mismo situándose en (3,3), el primero tomará de nuevo una de cada montón quedando en (2,2). Como ya sabemos, a partir de aquí, haga lo que haga el segundo, siempre ganará el primero.

Otras posibilidades son las de elegir los caminos vertical u horizontal en lugar de las diagonales. Si el segundo dejase (4,3) o (3,4), situándonos en las posiciones ganadoras, siempre ganaría el primero.

Variantes

- Aumentar el número de cerillas de cada montón.
- Que el número de cerillas de un montón sea diferente al del otro.

Generalización: Cualquier situación del juego se podrá representar como un punto en el plano cartesiano (m, n) . Desde este punto se podrá ir según las reglas del juego a $(m - 1, n)$, $(m, n - 1)$ y a $(m - 1, n - 1)$.

(5,0)	(4,0)	Posición ganadora (3,0)	(2,0)	Posición ganadora (1,0)	(0,0)
(5,1)	(4,1)	(3,1)	(2,1)	(1,1)	Posición ganadora (0,1)
(5,2)	Posición ganadora (4,2)	(3,2)	Posición ganadora (2,2)	(1,2)	(0,2)
(5,3)	(4,3)	(3,3)	(2,3)	(1,3)	Posición ganadora (0,3)
(5,4)	Posición ganadora (4,4)	(3,4)	Posición ganadora (2,4)	(1,4)	(0,4)
(5,5)	(4,5)	(3,5)	(2,5)	(1,5)	(0,5)

Empezar desde atrás. Dar el problema por resuelto. Resolver antes uno más sencillo. Generalizar

El problema siguiente pretende ejemplificar varias estrategias, plantearse modificaciones o extensiones y favorecer la generalización a diferentes niveles.

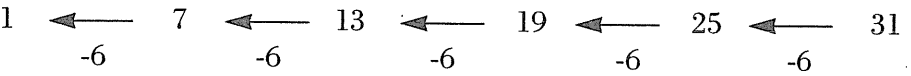
Juego del 31 (para dos jugadores)

El que juega primero dice un número cualquiera del 1 al 5. El que juega segundo le suma al número que dijo el primero un número del 1 al 5 y dice el resultado. A continuación, el primer jugador hace lo mismo, es decir, suma al número que dijo el otro jugador un número del 1 al 5 y dice el resultado. Así sucesivamente. Gana el que primero diga 31.

¿Tiene ventaja alguno de los dos jugadores? Si es así, ¿cómo debe jugar para ganar siempre?

Cada pareja debe tener claro que se trata de colaborar para encontrar la solución, pero que no es cosa de enfrentarse. Al principio deben jugar varias partidas, e incluso el profesor debe hacerlo (usando el retroproyector) con alguno de la clase.

Al cabo de un rato descubren que el que dice 25 ya ganará seguro. Y parece que ya lo tienen resuelto, hasta que advierten que no tienen garantizado el decir 25. Un poco más tarde descubren que asegurándose el 19, ya pueden «controlar» el 25 y ganar. Así pues, empezando por el final o dando el problema por resuelto («supongo que yo he dicho 31») pueden descubrirse posiciones ganadoras:



El módulo o diferencia entre cada dos números es 6 ($5 + 1$). ¿Cómo descubrir el principio sin necesidad de ir restando sucesivamente?

Un concepto de división es el de restas sucesivas. Así pues: $31 : 6 = 5$. El resto es 1 (el número por el que debemos empezar).

He aquí la solución aportada por un alumno de segundo ciclo de educación secundaria:

En este juego en el que para ganar hay que llegar al 31 sumando cada uno de los jugadores por turno hasta 5, lleva ventaja el primero por una sencilla razón.

Para ganar en la última tirada debe dejar la cifra fijada en 25, faltando 6 para 31, para que, sin que su oponente pueda llegar a 31, él sí pueda, independientemente de la cifra que diga su adversario.

Así, el juego queda reducido a 25, aunque, si no quiere dejarse nada al azar, el juego puede ir reduciéndose a 19, 13, 7 y, finalmente, 1. Lo que quiere decir que el primer jugador lleva la ventaja, ya que al decir 1, después puede completar en el siguiente turno hasta 7, después hasta 13, hasta 19, hasta 25 y finalmente hasta 31, ganando así el juego.

Si se fija la cifra en x , y el número máximo que puede sumarse en cada turno en n , ganará el jugador que fije la primera cantidad en un número R , tal que éste sea el resto de la división $x / n + 1$ y después vaya fijando en los siguientes turnos las cantidades en $R + (n + 1)t$ (siendo t un parámetro), para en el penúltimo turno llegar a la cifra $x - (n + 1)$ y así ganar el juego.

Esto ocurre cuando el cociente $x / n + 1$ es inexacto. Cuando este cociente es exacto, la ventaja la lleva el jugador que dice en segundo lugar, cuya estrategia para ganar es fijar cantidades en el primer turno en $n + 1$ y después, jugar con las cantidades dadas por su adversario, ir sumando $n + 1$ en cada turno hasta llegar al penúltimo para fijar la cantidad $x - (n + 1)$ y así poder ganar el juego en el siguiente turno.

¿Cómo abordar el problema usando la estrategia de plantearse uno más sencillo?

En lugar de llegar a 31, tomemos como final el 13 por ejemplo. Aquí se verá pronto un avance claro. El que llega a 7 ganará y ello lo hace empujando por el 1 y completando sobre 6 con lo que diga el segundo.

Una vez que los alumnos han encontrado una estrategia ganadora para el juego del 31, les debemos plantear una serie de variantes que les ayuden a generalizar sus soluciones. He aquí una secuencia:

1. Practicar el mismo juego cambiando el final a 35, 36, 50, 100, etc. ¿Vale todavía la misma estrategia? Si no fuera así, ¿en qué sentido cambiarla?
Formular una estrategia ganadora para un número n .
2. En el juego del 31, cambiar el intervalo de números que pueden sumar cada uno, por ejemplo de 1 a 7, de 1 a 9, etc. ¿Qué estrategia se debe usar ahora?
3. Combinar las dos modificaciones anteriores. Se trata de escribir una estrategia ganadora para un número n , si puede sumar cada uno desde 1 hasta m . Siempre que $m < n$.
4. Considerar ahora que el que diga el último número pierde.

Una evidencia de que los alumnos empiezan a considerar la idea de generalizar es cuando empiezan a enfrascarse en lograr la estrategia en lugar de centrarse en ganar o perder.

Ganar un juego (lo mismo que resolver un problema cualquiera) es encontrar una respuesta, descubrir una estrategia general es resolver verdaderamente el problema.

Problemas análogos

- Juego del NIM.
- Jugando con cerillas.

La resolución de problemas es una actividad compleja en la que nos embarcamos cuando no conocemos un procedimiento seguro para afrontarlo.

Aunque los alumnos dominen las estrategias que hemos comentado anteriormente y otras más, no suelen reconocer que lo más importante en la resolución de problemas reside no tanto en la respuesta a la pregunta del problema, sino en lo que la respuesta nos puede «ilustrar» sobre otras preguntas.

Debemos ayudar a los alumnos a mirar más allá de sus respuestas y buscar soluciones *generalizadas*.

Generalizar es, pues, la culminación de la tarea de resolución de problemas. Mediante ella se logra la abstracción y en definitiva la transferencia de lo aprendido a nuevas situaciones.

Bibliografía

- BURTON, L. (1988): Conferencia pronunciada en el CIDE de Madrid, en mayo de 1991.
- CALLEJO DE LA VEGA, M.L.: *Resolución de problemas en un Club matemático*. Madrid. Narcea.
- CENTRO DE PROFESORES DE VILLARROBLEDO; DPTO. DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD DE VALENCIA. *Resolución de problemas. Consejos para profesores*. Versión de la serie: *Problem solving tips for teachers de Phares G. O'Daffer*, 1989.
- CERDÁN, F.; PUIG, L. (1988): *Problemas aritméticos elementales*. Madrid. Síntesis.
- GRUPO CERO DE VALENCIA (1984): *De 12 a 16. Un currículum de Matemáticas*. Valencia. Mestral Libros.
- GUZMÁN, M. (1991): *Para pensar mejor*. Barcelona. Labor.
- HERNÁN, P.; CARRILLO, M.L. (1988): *Recursos para el aula de Matemáticas*. Madrid. Síntesis.
- INFORME COCKCROFT (1982): *Shell Centre for Mathematical Education: Problems with Patterns and Numbers*. Trad. de Félix Alayo. Edición en castellano. MEC.
- MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. (1988): *Pensar matemáticamente*. Barcelona. Labor/MEC.

- NCTM (1990): *Sugerencias para resolver problemas*. México. Trillas.
- NCTM (1991): *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Ed. en castellano de la Sociedad andaluza de educación matemática «Thales».
- POLYA, G. (1982): *Cómo plantear y resolver problemas*. México. Trillas.
- SCHOENFELD, A.H. (1985): *Mathematical Problem Solving*. Florida. Academic Press.